Если же Δ_2 минимальное, то фокусная поверхность не может быть конусом. Для не-минимального распределения Δ_2 будет верна

Т е о р е м а 9. Если распределение Δ_2 не-минимально, ранг $Q = n-2$ и верно $(\Lambda^{n-1}_{\hat{n}\,n-1})^2 = -4\Lambda^{n-1}_{\hat{n}\,n}\cdot\Lambda^{n}_{\hat{n}\,n-1}$, то фокусная поверхность является конусом в Δ_{n-2} с точечной вершиной.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Материалы по геометрии /МГПИ им. В.И. Ленина. М., 1978. Вып. I.

2. М а т и е в а Г.К. К геометрии минимальных распределений// Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Вып. 15. С. 60–63.

3. К у з ь м и н М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n, и их обобщения// Проблемы геометрии/ ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 215–230.

4. Г р и г о р ь е в И.Н. Асимптотические преобразования P-ортогонально-сопряженных систем в n-мерном пространстве// Докл. АН СССР. 1954. Т. 97. №5. С. 765–767.

УДК 514.75

О СЕМЕЙСТВАХ КОЛЛИНЕАЦИЙ МНОГОМЕРНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н.В. М а л а х о в с к и й

(Калининградский ун-т)

Исследуются n-параметрические семейства Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to p_n$ n-мерных проективных пространств, отображающих заданную точку $P^\circ \in \mathcal{P}_n$ в заданную точку $p^\circ \in p_n : \pi(P^\circ) = p^\circ$, причем точки P° и p° описывают n-мерные области. Построена последовательность фундаментальных объектов семейства Π_n, найдены и геометрически охарактеризованы некоторые тензоры, охватываемые ими. Определено фокальное многообразие коллинеации $\pi \in \Pi_n$ и порождаемые им фокальные гиперповерхности в пространствах $\mathcal{P}_n$ и p_n.

§1. Поля фундаментальных объектов семейства коллинеаций

Отнесем пространства $\mathcal{P}_n$ и p_n к подвижным реперам $R=\{A_{I'}\}$ и $r=\{a_{i'}\}$ $(I',J',K',i',j',k'=\overline{0,n})$, где $A_0=P^\circ$, $a_0=p^\circ$. Деривационные формулы реперов и уравнения структуры пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n запишутся в виде:

$$dA_{I'} = \Omega^{K'}_{I'} A_{K'}, \quad da_{i'} = \omega^{k'}_{i'} a_{k'}; \qquad (1.1)$$

$$D\Omega^{K'}_{I'} = \Omega^{J'}_{I'} \wedge \Omega^{K'}_{J'}, \quad d\omega^{k'}_{i'} = \omega^{j'}_{i'} \wedge \omega^{k'}_{j'}, \qquad (1.2)$$

причем $\Omega^{I'}_{I'} = 0$, $\omega^{i'}_{i'} = 0$. Обозначим через $\tilde{X}^{I'}$, $\tilde{x}^{i'}$ однородные, а через $X^I = \frac{\tilde{X}^I}{\tilde{X}^0}$, $x^i = \frac{\tilde{x}^i}{\tilde{x}^0}$ -неоднородные координаты точек M и m в пространствах $\mathcal{P}_n$, p_n $(I,J,K,i,j,k=\overline{1,n})$. Тогда уравнения стационарности точек M и m запишутся в виде (см. [1], с. 356)

$$\begin{cases} \nabla X^I - X^I X^K \Omega^0_K + \Omega^I = 0, \\ \nabla x^i - x^i x^k \omega^0_k + \omega^i = 0, \end{cases} \qquad (1.3)$$

где $\Omega^I \overset{def}{=} \Omega^I_0$, $\omega^i = \omega^i_0$, а символ ∇ означает абсолютное дифференцирование с учетом прибавления членов с диагональными формами Ω^0_0, ω^0_0, взятыми со знаком " – " для верхних индексов и со знаком "+" для нижних с кратностью, равной числу индексов.

Учитывая, что $a_0 = \pi(A_0)$, коллинеация $\pi \in \Pi_n$ определится формулой

$$x^i = \frac{M^i_I X^I}{1 - P_I X^I}. \qquad (1.4)$$

Дифференцируя (1.4) с использованием (1.3), убеждаемся, что формы Пфаффа

$$\Omega^I, \ \omega^i, \ \nabla M^i_I, \ \nabla P_I + \Omega^0_I - M^k_I \omega^0_k \qquad (1.5)$$

являются структурными формами коллинеации $\pi \in \Pi_n$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только невырожденные коллинеации. Так как точки P° и p° описывают n-мерные области, то формы Пфаффа Ω^I можно принять за базисные и записать систему дифференциальных уравнений семейства коллинеаций Π_n в виде.

$$\begin{cases} \omega^i = \lambda^i_I \Omega^I, \quad \nabla M^i_I = M^i_{IK} \Omega^K, \\ \nabla P_I + \Omega^0_I - M^k_I \omega^0_k = P_{IK} \Omega^K, \end{cases} \qquad (1.6)$$

причем

$$\det(\lambda^i_I) \neq 0, \quad \det(M^i_I) \neq 0. \qquad (1.7)$$

Продолжая систему (1.6) два раза, находим:

$$\begin{cases} \nabla\lambda^i_j = \lambda^i_{jk}\Omega^k, \quad \Delta M^i_{jk} = M^i_{jkl}\Omega^l, \\ \Delta\lambda^i_{jk} = \lambda^i_{jkl}\Omega^l, \quad \Delta P_{jk} = P_{jkl}\Omega^l, \\ \Delta M^i_{jkl} = M^i_{jklh}\Omega^h, \quad \Delta P_{jkl} = P_{jklh}\Omega^h, \end{cases} \tag{I.8}$$

где

$$\begin{cases} \Delta M^i_{jk} = \nabla M^i_{jk} + M^i_{(j}\Omega^0_{k)} - M^{(i}_j \lambda^{\kappa)}_{jk}\,\omega^0_\kappa, \\ \Delta\lambda^i_{jk} = \nabla\lambda^i_{jk} + \lambda^i_{(j}\Omega^0_{k)} - \lambda^i_{(j}\lambda^\kappa_{k)}\,\omega^0_\kappa, \\ \Delta P_{jk} = \nabla P_{jk} + P_{(j}\Omega^0_{k)} - M^\kappa_{jk}\,\omega^0_\kappa, \\ \Delta M^i_{jkl} = \nabla M^i_{jkl} + M^i_{(kl)}\Omega^0_j + 2M^i_{j(k}\Omega^0_{l)} - \\ \qquad - (\lambda^{(i}_l M^{\kappa)}_{jk} + \lambda^{(i}_k M^{\kappa)}_{jl} + \lambda^{(i}_{kl} M^{\kappa)}_j)\,\omega^0_\kappa, \\ \Delta P_{jkl} = \nabla P_{jkl} + P_{(lk)}\Omega^0_j + 2P_{jl}\Omega^0_k + 2P_{jk}\Omega^0_l - \\ \qquad - (\lambda^\kappa_l P_{jk} + M^\kappa_{jkl})\,\omega^0_\kappa, \end{cases} \tag{I.9}$$

а круглые скобки означают циклирование по соответствующим индексам. Здесь величины " λ " симметричные по любой паре нижних индексов, а величины " M " и " P " – по любой паре нижних индексов, начиная со второго. Системы величин

$$\Gamma_0 = \{M^i_j, P_k\}, \quad \Gamma_1 = \{\Gamma_0, \lambda^i_j, M^i_{jk}, P_{jk}\},$$

$$\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \lambda^i_{jk}, M^i_{jkl}, P_{jkl}\}, \quad \Gamma_3 = \{\Gamma_2, \lambda^i_{jkl}, M^i_{jklh}, P_{jklh}\}$$

образуют поля фундаментальных объектов семейства Π_n. Подобъект $\{\lambda^i_j\}$ определяет точечное отображение $\varphi: P^0 \in \mathcal{P}_n \mapsto p_0 \in p_n$, индуцируемое семейством Π_n.

§2. Тензорные поля на семействе Π_n

Из (1.6) и (1.8) следует, что системы величин $\{\lambda^i_j\}$ и $\{M^i_j\}$ являются тензорами типа (1.1). В силу (1.7) системы величин $\{\lambda^{*j}_i\}$, $\{M^{*j}_i\}$, определяемые соотношениями

$$\lambda^{*j}_i\lambda^i_k = \delta^j_k, \quad M^{*j}_i M^i_k = \delta^j_k, \tag{2.1}$$

также образуют тензоры типа (I.I). Имеем:

$$\begin{cases} d\lambda^{*j}_i = \lambda^{*j}_{ik}\Omega^k - \lambda^{*k}_i\Omega^j_k + \lambda^{*j}_\kappa\omega^\kappa_i + \lambda^{*j}_i(\Omega^0_0 - \omega^0_0), \\ dM^{*j}_i = M^{*j}_{ik}\Omega^k - M^{*k}_i\Omega^j_k + M^{*j}_\kappa\omega^\kappa_i + M^{*j}_i(\Omega^0_0 - \omega^0_0), \end{cases} \tag{2.3}$$

где

$$\lambda^{*j}_{ik} = -\lambda^{*j}_\kappa\lambda^{*l}_i\lambda^\kappa_{lk}, \quad M^{*j}_{ik} = -M^{*j}_\kappa M^{*l}_i M^\kappa_{lk}. \tag{2.4}$$

Обозначим

$$M_j = M^{*k}_i M^i_{kj} - \lambda^{*k}_i\lambda^i_{kj}. \tag{2.5}$$

Используя (I.8) и (2.3), находим:

$$dM_j = M_k\Omega^k_j - M_j\Omega^0_0 + M_{jk}\Omega^k, \tag{2.6}$$

где $M_{jk} = M^{*l}_{ik}M^i_{lj} + M^{*l}_i M^i_{ljk} - \lambda^{*l}_{ik}M^i_{lj} - \lambda^{*l}_i\lambda^i_{ljk}$.

Следовательно, система величин $\{M_j\}$ и системы величин

$$\lambda_i = M_k\lambda^{*k}_i, \quad m_i = M_k M^{*k}_i \tag{2.8}$$

образуют тензоры типа (0,I), позволяющие строить на семействе коллинеации Π_n тензорные поля различных типов.

Тензор $\{M_j\}$ определяет инвариантную гиперплоскость в пространстве $\mathcal{P}_n$, проходящую через точку A_0:

$$M_j X^j = 0. \tag{2.9}$$

Тензоры $\{\lambda_i\}$ и $\{m_i\}$ определяют инвариантные гиперплоскости в пространстве p_n, проходящие через точку a_0:

$$\lambda_i x^i = 0, \quad m_i x^i = 0. \tag{2.I0}$$

Рассмотрим тензор

$$\tilde\lambda^i_k = M^i_k - \lambda^i_k. \tag{2.II}$$

Обозначим через r -ранг матрицы $\{\tilde\lambda^i_k\}$. Условие $r=0$ выделяет класс семейств Π_n, который обозначим Π^0_n. Для семейства Π^0_n тензоры $\{M_j\}, \{\lambda_i\}, \{m_i\}$ –нулевые, а системы величин

$$H_j = (n+1)P_j - \lambda^{*k}_i\lambda^i_{jk}, \quad h_i = \lambda^{*j}_i H_j, \quad \tilde h_i = M^{*j}_i H_j \tag{2.I2}$$

образуют тензоры.

Геометрически семейство Π^0_n характеризуется тем, что коллинеация π принадлежит связке коллинеаций $K(Q_j)$:

$$x^i = \frac{\Lambda^i_J X^J}{1 - Q_x X^x}\,, \tag{2.13}$$

касательных к точечному отображению φ в точке P°.
Системы величин

$$A^x_J = \lambda^{*x}_i M^i_J\,,\quad B^x_J = M^{*x}_i \lambda^i_J\,, \tag{2.14}$$

$$a^i_k = \lambda^i_J M^{*J}_k\,,\quad b^i_k = M^i_J \lambda^{*J}_k \tag{2.15}$$

определяют поля аффиноров соответственно на $\mathcal{P}_n$ и p_n, причем:

$$A^x_J B^J_z = \delta^x_z\,,\quad a^i_k b^k_j = \delta^i_j\,. \tag{2.16}$$

§3. Ассоциированные геометрические образы.

Из (2.1) вытекает, что тензор $\{M^{*J}_i\}$ определяет связку коллинеаций $p_n \to \mathcal{P}_n$

$$X^J = \frac{M^{*J}_i x^i}{1 - p_k x^k}\,, \tag{3.1}$$

каждая из которых имеет в точке p° касание 1-го порядка с коллинеацией π^{-1}. Тензор $\{\lambda^{*J}_i\}$ определяет связку коллинеаций $p_n \to \mathcal{P}_n$

$$X^J = \frac{\lambda^{*J}_i x^i}{1 - q_k x^k}\,, \tag{3.2}$$

обратных к коллинеациям $K(Q_k)$, касательным в точке P° к точечному отображению φ. Из (3.1) и (3.2) вытекает:

П р е д л о ж е н и е 1. Аффиноры $\{A^x_J\}$ и $\{B^x_J\}$ определяют в точке P° связки проективных преобразований пространства $\mathcal{P}_n$, имеющих в P° касание 1-го порядка соответственно с преобразованиями $K^{-1}(Q_J)\circ\pi$ и $\pi^{-1}\circ K(Q_J)$.

Аналогичный геометрический смысл имеют аффиноры $\{a^i_k\}$ и $\{b^i_k\}$. Если $0 < r < n$, то тензор $\{\tilde{\lambda}^i_J\}$ определяет в пространстве $\mathcal{P}_n$ инвариантное подпространство $\mathcal{L}$

$$\tilde{\lambda}^i_J X^J = 0\,, \tag{3.3}$$

содержащее точку P° и имеющее размерность $n-r$.

П р е д л о ж е н и е 2. Подпространство $\mathcal{L}$ характеризуется тем, что сужение коллинеации π на $\mathcal{L}$ принадлежит связке коллинеаций $\mathcal{L} \to p_n$, являющихся сужениями на $\mathcal{L}$ коллинеаций $K(Q_J)$, касательных к точечному отображению φ.

Доказательство вытекает из (3.3), (2.11), (1.4), (1.6). Тензор $\{M_J\}$ определяет в $\mathcal{P}_n$ инвариантную гиперплоскость

$$M_J X^J = 0\,, \tag{3.4}$$

проходящую через точку P°. Распределение этих гиперплоскостей задается относительно инвариантной формой Пфаффа $\theta = M_J \Omega^J$, геометрический смысл которой вытекает из следующего результата.

П р е д л о ж е н и е 3. Форма Пфаффа θ определяется полем аффинора $\{A^x_J\}$

$$\theta = d\ln\det(A^x_J)\,. \tag{3.5}$$

Доказательство вытекает из (2.14), (1.6), (1.8), (2.5).

З а м е ч а н и е. В случае, когда распределение гиперплоскостей (3.4) голономно, т.е. когда дифференциальное уравнение $\theta = 0$ вполне интегрируемо, гиперплоскости (3.4) огибают гиперповерхности в $\mathcal{P}_n$. Тогда семейство Π_n порождает точечное соответствие между гиперповерхностями проективных пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n [2], [3].

В случае семейства Π°_n тензор H_J определяет в $\mathcal{P}_n$ инвариантную гиперплоскость

$$H_J X^J = 0\,. \tag{3.6}$$

Справедлив следующий результат:

П р е д л о ж е н и е 4. Гиперплоскость (3.6) является подпространством, сужение на которое коллинеации π и локальной коллинеации Чеха [4] точечного отображения φ совпадают.

С л е д с т в и е. Обращение тензора $\{H_J\}$ в тождественно нулевой тензор выделяет класс семейств Π_n коллинеаций π, являющихся локальными коллинеациями точечного отображения, т.е. в этом случае семейство Π_n порождается точечным отображением.

Гиперплоскости

$$h_i x^i = 0\,,\quad \tilde{h}_i x^i = 0 \tag{3.7}$$

являются образами гиперплоскости (3.6) соответственно при отображениях $K(Q_J)$ и π.

§4. Фокальные гиперповерхности, ассоциированные с семейством коллинеаций

Обозначим

$$f^i = M^i_J X^J + x^i (P_J X^J - 1)\,. \tag{4.1}$$

Коллинеация $\pi: \mathcal{P}_n \to p_n$ семейства Π_n определяется уравнениями $f^i = 0$. Назовем точку $(X^J, x^k) \in \mathcal{P}_n \times p_n$ фокальной точкой коллинеации $\pi \in \Pi_n$, если существует направление $\Omega^x = t^x\theta$, где

θ -параметрическая форма [2 ,с.41], вдоль которого она принадлежит двум смежным коллинеациям. Из этого определения следует, что координаты X^j, x^k фокальной точки удовлетворяют системе уравнений

$$f^i = 0, \quad f^i + df^i = 0.$$

Направление $\Omega^x = t^x\theta$ называется фокальным направлением семейства Π_n. Используя (1.3),(1.6), находим

$$df^i = \mu^i_k f^k + f^i_x \Omega^x, \tag{4.2}$$

где

$$\mu^i_k = x^i\omega^0_k - \omega^i_k + \delta^i_k(\omega^0_0 + X^x\Omega^0_x), \tag{4.3}$$

$$f^i_x = P_{jx}x^iX^j + (M^i_{jx} - \lambda^i_x P_j)X^j - x^iP_x - \tilde{\lambda}^i_x. \tag{4.4}$$

(4.5)

Следовательно, фокальные точки и фокальные семейства определяются системой уравнений:

$$f^i = 0, \quad f^i_x\Omega^x = 0. \tag{4.6}$$

Исключая из этих уравнений базисные формы Ω^j , получим систему уравнений для определения фокальных точек коллинеации $\pi \in \Pi_n$:

$$f^i = 0, \quad \det(f^i_x) = 0. \tag{4.7}$$

Эта система содержит $n+1$ уравнение на $2n$ координат X^j, x^k. Определяя из уравнений $f^i=0$ координаты x^k и подставляя их значения в оставшиеся уравнения системы (4.7), убеждаемся, что проекция множества фокальных точек на пространство $\mathcal{P}_n$ образует в нем алгебраическую гиперповерхность S порядка 2^n. Аналогично, исключая X^j , получим в пространстве P_n алгебраическую гиперповерхность σ порядка 2^n.

Назовем S и σ фокальными гиперповерхностями коллинеации $\pi \in \Pi_n$. Из (4.5),(4.7) непосредственно вытекает

П р е д л о ж е н и е 5. Фокальная гиперповерхность S коллинеации $\pi \in \Pi_n$ содержит точку P^0 тогда и только тогда, когда $r = \operatorname{rang}(\tilde{\lambda}^i_x) < n$, т.е. когда инвариантное подпространство (3.3) не вырождается в точку P^0 .

Библиографический список

1.Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр.моск.матем.о-ва/ГИТЛ.М.,1953.Т.2.С.275-382.

2.Б о л о д у р и н В.С. О точечных соответствиях между гиперповерхностями проективных пространств//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1969.Т.2.С.55-79.

3.М а л а х о в с к и й Н.В. О двумерных многообразиях в прямом произведении проективных пространств//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр. ун-т.Калининград,1988.Вып.19.С.55-57.

4.Ч е х Э. Проективно-дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами.I//Чехосл.матем.ж.1952.V.2.№1. P.91-107.

5.Л а п т е в Г.Ф. Распределение касательных элементов// Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СЕТЕЙ НА ПАРЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

А.Ф.М а с а г у т о в а
(МГПИ им.В.И.Ленина)

В работе рассматриваются некоторые вопросы геометрии дифференцируемого отображения области Ω на область $\bar{\Omega}$ в евклидовом пространстве E_n с использованием тензора h^a_{bc} , свойства которого в значительной мере отражают геометрические свойства пары подмногообразий.

1. В n-мерном евклидовом пространстве E_n рассмотрим дифференцируемое отображение f некоторой области Ω на область $\bar{\Omega}$. Пусть произвольной точке $x \in \Omega$ соответствует при отображении f точка $y \in \bar{\Omega}$. Отнесем область Ω к подвижному реперу $R^x = \{x, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ так, что $\vec{e}_n \parallel \vec{xy}$, а область $\bar{\Omega}$ - к подвижному реперу $R^y = \{y, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$, где

$$R^y = f_{*x}(R^x), \tag{1}$$

f_{*x} -индуцированное отображение.

Деривационные формулы реперов R^x и R^y имеют вид:

$$\begin{cases} d\vec{x} = \omega^a\vec{e}_a, & d\vec{e}_a = \omega^b_a\vec{e}_b, \\ d\vec{y} = \bar{\omega}^b\vec{a}_b, & d\vec{a}_a = \bar{\omega}^b_a\vec{a}_b \end{cases} \tag{2}$$

(здесь и далее $a, b, c, \ldots = \overline{1,n}$; $i, j, k, \ldots = \overline{1,n-1}$).